

Les opérations arithmétiques sur les nombres binaires

Site Internet :
www.gecif.net

Type de document :
Cours

Intercalaire :

Date :

I - Principe de l'addition binaire

I - 1 - Table d'addition élémentaire

En binaire il n'existe seulement 2 chiffres : le 0 et le 1. Un nombre binaire est un ensemble de chiffres binaires, appelés des bits. Lors de l'addition de 2 chiffres binaires (de 2 bits) il n'y a que 3 possibilités (en effet en raison de la commutativité de l'addition on a $0 + 1 = 1 + 0$) :

$$0 + 0 =$$

$$0 + 1 =$$

$$1 + 1 =$$

A	B	S	R
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

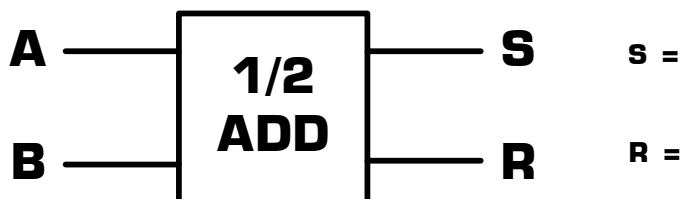
S est la somme binaire des deux bits A et B, et R est la retenue éventuelle.

Exemples d'additions binaires :

I - 2 - Le montage demi-additionneur

.....
.....
.....
Symbole du demi-additionneur :

Equation des sorties d'après la table d'addition élémentaire :



Structure interne d'un demi-additionneur :



demi-additionneur

Limites du $\frac{1}{2}$ additionneur :

.....

.....

.....

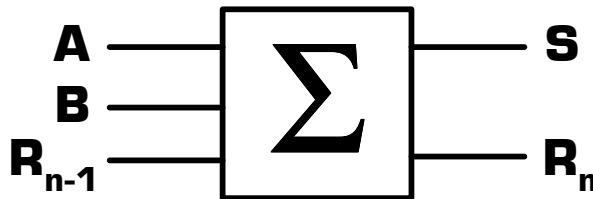
II - L'additionneur complet cascadable

II - 1 - Le montage additionneur complet

A la différence du $\frac{1}{2}$ additionneur, l'additionneur complet dispose d'une 3^{ème} entrée permettant de prendre en compte une éventuelle retenue. En mettant en cascade plusieurs additionneurs complets il est alors possible d'effectuer l'addition [c'est-à-dire de calculer la somme] de 2 nombres binaires d'une taille quelconque.

Symbole de l'additionneur complet :

Remarque :



la lettre Σ [lettre grecque **Sigma** majuscule] au centre de l'additionneur symbolise la somme en arithmétique.

L'additionneur complet possède 3 entrées [A, B et R_{n-1}] et 2 sorties [S et R_n]. A et B sont les 2 bits de rang n à additionner, S est la somme des bits A, B et R_{n-1} , R_n est la retenue éventuelle de rang n, et R_{n-1} est la retenue éventuelle du rang précédent, c'est-à-dire la retenue du rang n-1.

L'additionneur complet doit calculer la somme de 3 bits : $A + B + R_{n-1}$. Le 0 étant l'élément neutre de l'addition, lors de l'addition de 3 bits un seul cas est nouveau par rapport à l'addition de 2 bits :

1 + 1 + 1 =

Table de vérité de l'additionneur complet :

Equations logiques des sorties :

A	B	R_{n-1}	S	R_n
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

S =

R_n =

Structure interne de l'additionneur complet cascadable :

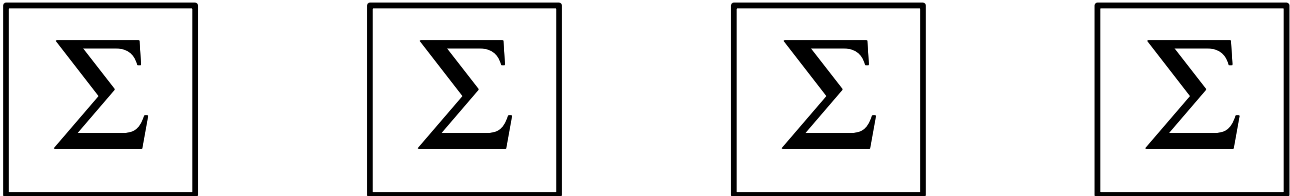


additionneur complet cascadable

II - 2 - Mise en cascade de plusieurs additionneurs complets

L'additionneur complet prenant en compte la retenue du rang précédent, il est cascadable. La mise en cascade permet d'effectuer une addition entre 2 nombres binaires d'une taille quelconque en connectant entre eux plusieurs additionneurs complet, chacun prenant en compte la retenue précédente.

Exemple de mise en cascade de 4 additionneurs complet pour calculer la somme de deux nombres binaires de 4 bits chacun :



Remarques :

- $A_3 A_2 A_1$ et A_0 sont les 4 bits du 1^{er} nombre binaire (A_0 est le LSB et A_3 est le MSB)
- $B_3 B_2 B_1$ et B_0 sont les 4 bits du 1^{er} nombre binaire (B_0 est le LSB et B_3 est le MSB)
- Le résultat est composé des 5 bits $S_4 S_3 S_2 S_1$ et S_0
- L'entrée de retenue du premier additionneur (le poids faible) est mise à 0
- La sortie de retenue du dernier additionneur (le poids forts) constitue le 5^{ème} bit du résultat
- Chaque entrée R_{n-1} est reliée à la sortie R_n de l'additionneur complet de rang inférieur
- Ce montage effectue l'addition bit à bit en tenant compte des retenues éventuelles, telle qu'on la fait à la main

III - Représentation des nombres négatifs en binaire

Rappel : on appelle **complément à 1** d'un nombre le nombre obtenu en complétant chacun de ses bits.

Exemple :

Limites du complément à 1 :

Exemple :

Pour représenter les nombres négatifs en binaire il y a deux solutions.

III - 1 - Solution 1

On ajoute un bit de signe à gauche de la représentation binaire du nombre :

- Si le bit de signe = 0 alors le nombre est **positif**
- Si le bit de signe = 1 alors le nombre est **négatif**

Exemple :

Avantage :

Limites de la représentation des nombres négatifs avec un bit de signe :

Exemple : pour afficher la valeur numérique d'une température on pourra utiliser un bit de signe pour coder les nombres relatifs. Dans ce cas le bit de signe représente l'état du signe moins de l'afficheur.

III - 2 - Solution 2 : le complément à 2

$$- N =$$

Avantage du complément à 2 : le complément à 2 permet de représenter des nombres signés (positifs et négatifs) sans ambiguïté. De plus il permet d'effectuer des opérations (somme et différence) sur les nombres relatifs en utilisant un simple additionneur.

Inconvénient du complément à 2 : il est plus difficile d'effectuer $\overline{\overline{N}} + 1$ que de coder \overline{N} ou d'ajouter simplement un bit de signe. La fonction complément à 2 ne fait pas partie des fonctions de base de la logique ou de l'arithmétique.

Exemple d'application du complément à 2 : pour effectuer la sous traction $A - B$ on va ajouter à A le complément à 2

$$\text{de B : } A - B = A + \overline{B} + 1$$

Exemples numériques :

ATTENTION : tous les nombres, y compris le résultat, doivent être exprimés dans le même format (par exemple sur 4 bits).

Remarque : le complément à 2 du complément à 2 du nombre N est le nombre N lui-même. La fonction réciproque du complément à 2 est donc la fonction complément à 2 elle-même. On dit alors que la fonction complément à 2 est une **involution** :