# Codage des nombres à virgule en binaire

| Site Internet : **www.gecif.net** | Type de document : **Cours** | Intercalaire : | Date : |
|---|---|---|---|

## I – Les 4 écritures d'un nombre à virgule

Un nombre à virgule peut s'écrire selon 4 représentations différentes. Il faut savoir passer d'une représentation à une autre, ce qui constitue 3 transformations à connaître. Prenons l'exemple du nombre **43,375** :

| écriture directe en base 10 : 43.375 | → | écriture directe en base 2 : 101011.011 | → | écriture scientifique en base 2 : $1.01011011 \times 2^{101}$ | → | écriture scientifique en base 16 : 1.5b00000000000p+5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **1** | **B** | **2** | **C** | **3** | **D** |

Les 4 écritures sont notées ici **A**, **B**, **C** et **D**, et les 3 transformations sont notées **1**, **2** et **3**.

Dans une **écriture directe** (représentations **A** et **B**) on écrit en clair la **partie entière** du nombre et sa **partie décimale** (appelée aussi partie fractionnaire), les deux étant séparées par un séparateur décimal (appelé « virgule » en langage courant et représenté par un « point » en informatique).

Dans une **écriture scientifique** (représentions **C** et **D**), on écrit la **mantisse** et l'**exposant** : la mantisse a pour partie entière un seul chiffre non nul (1 en base 2), et l'exposant représente la puissance à laquelle il faut élever 2.

En python, la méthode **hex()** appliquée à un nombre en virgule flottante (de type **float**) permet de passer directement de la représentation **A** (écriture directe en base 10) à la représentation **D** (écriture scientifique en base 16) :

```
>>> 43.375.hex()
'0x1.5b00000000000p+5'
```

Voyons maintenant en détail chacune des 3 transformations notées ci-dessus **1**, **2** et **3**.

## II – Transformation n°1

Pour passer de la représentation **A** (écriture directe en base 10) à la représentation **B** (écriture directe en base 2) il faut traiter séparément la partie entière et la partie décimale. Exemple avec le nombre **43,375** :

**Étape 1 :** on convertit la partie entière en binaire, soit l'entier $\mathbf{43_{(10)}}$ :

Une succession de divisions entières par 2 permet de convertir la partie entière de la base 10 à la base 2 :

43 / 2 = 21 et il reste **1**
21 / 2 = 10 et il reste **1**
10 / 2 = 5 et il reste **0**
5 / 2 = 2 et il reste **1**
2 / 2 = **1** et il reste **0** : on s'arrête lorsque le quotient est égal à 1 (il représente le bit de poids fort : MSB)

En regroupant le dernier quotient et les restes on conclut que $\mathbf{43_{(10)} \equiv 101011_{(2)}}$ : en effet 43 = 1+2+8+32

**Étape 2 :** on convertit la partie décimale en binaire, soit le nombre $\mathbf{0{,}375_{(10)}}$ :

Une succession de multiplications par 2 permet de convertir la partie décimale de la base 10 à la base 2 :

On multiplie 0,375 par 2 : 0,375 x 2 = 0,75. On obtient 0,75 que l'on écrira **0** + 0,75
On multiplie 0,75 par 2 : 0,75 x 2 = 1,5. On obtient 1,5 que l'on écrira **1** + 0,5 (quand le résultat de la multiplication par 2 est supérieur à 1, on garde uniquement la partie décimale)
On multiplie 0,5 par 2 : 0,5 x 2 = 1,0. On obtient 1,0 que l'on écrira **1** + 0,0 (la partie décimale est égale à 0, on arrête le processus)

En regroupant les parties entières des résultats on conclut que $\mathbf{0{,}375_{(10)} \equiv 0{,}011_{(2)}}$ : en effet 0,375 = 1/4+1/8

Enfin on regroupe la partie entière et la partie décimale : le nombre $43{,}375_{(10)}$ s'écrit 101011,011 en base 2.

***Remarque :*** dans le sens inverse pour passer de la représentation **B** à la représentation **A** il y a 2 solutions :
- soit on additionne le poids des bits qui sont à 1 (dans la partie entière comme dans la partie décimale)
- ou bien on remarque que $101011{,}011_{(2)} = 101011011_{(2)} / 8_{(10)}$

Exemple : comment s'écrit en base 10 le nombre à virgule qui s'écrit 101011,011 en base 2 ?

**Solution 1 :** on additionne le poids des bits qui sont à 1 : $101011{,}011_{(2)} \equiv 32+8+2+1+1/4+1/8=43.375_{(10)}$

**Solution 2 :** on convertit en base 10 le nombre entier $101011011_{(2)}$ puis on divise le résultat par $2^3$ (car on a décalé la virgule vers la droite de 3 rangs) : $101011011_{(2)} \equiv 347_{(10)}$ donc $101011{,}011_{(2)} \equiv 347 / 8 = 43.375_{(10)}$

## III – Transformation n°2

Pour passer de l'écriture directe en base 2 (représentation **B**) à l'écriture scientifique en base 2 (représentation **C**) il faut **décaler la virgule vers la gauche** jusqu'à obtenir une partie entière contenant un seul chiffre non nul (donc 1 puisqu'on est en binaire). Or en base 2 le décalage de la virgule d'un rang vers la gauche correspond à une division par 2. Pour compenser l'ensemble de ces divisions par 2 il faudra multiplier le résultat final (nombre décimal ayant comme partie entière 1 et appelé **« la mantisse »**) par 2 élevé à la puissance correspondant au nombre de décalages (ce nombre de décalages est appelé **« l'exposant »**).

Exemple : le nombre qui s'écrit 101011,011 en écriture directe en base 2 s'écrit $1{,}01011011 \times 2^5$ en écriture scientifique en base 2 (on a décalé la virgule vers la gauche de 5 rangs, d'où l'exposant qui vaut 5).

Pour la représentation **C** il y a deux solutions pour écrire l'exposant (il faut être clair sur la base utilisée) :

- si l'exposant est représenté en base 10 alors le nombre s'écrit $1{,}01011011 \times 2^5$
- si l'exposant est représenté en base 2 alors le nombre s'écrit $1{,}01011011 \times 2^{101}$
- le terme « **écriture scientifique en base 2** » signifie surtout que **la mantisse est écrite en base 2**

## IV – Transformation n°3

Pour passer de l'écriture scientifique en base 2 à l'écriture scientifique en base 16 il faut **convertir la partie décimale de la mantisse en base 16**. Par exemple $1{,}01011011 \times 2^5$ devient $1{,}5B \times 2^5$
Ici on a simplement convertit $01011011_{(2)}$ en $5B_{(16)}$

**Question :** quelle doit être la taille de la mantisse ?
**Réponse :** ça dépend si on utilise la norme IEEE-754 en simple précision ou en double précision.

Comment s'écrit le nombre $43.375_{(10)}$ avec la norme IEEE-754 **en simple précision** ?
La partie décimale de la mantisse doit être codée sur **23 bits**, soit 6 chiffres hexadécimaux ($6\times4=24$). On allonge alors la mantisse avec des 0 à droite jusqu'à obtenir 6 chiffres hexadécimaux : $43.375_{(10)} \equiv$ **1.5b0000p+5**

Comment s'écrit le nombre $43.375_{(10)}$ avec la norme IEEE-754 **en double précision** ?
La partie décimale de la mantisse doit être codée sur **52 bits**, soit 13 chiffres hexadécimaux ($13\times4=52$). On allonge alors la mantisse avec des 0 à droite jusqu'à obtenir 13 chiffres : $43.375_{(10)} \equiv$ **1.5b00000000000p+5**

Dans tous les cas pour la représentation **D** :

- la **partie entière** de la mantisse est **toujours 1** (c'est le MSB de la représentation **B**)
- seule la **partie décimale** de la mantisse est écrite en **base 16**
- le symbole **p** représente une puissance de 2
- et à droite de **p** on retrouve l'exposant (ici +5) écrit en **base 10**

Remarque concernant la valeur de l'exposant dans la représentation **D** :

Soit N un nombre à virgule en base 10. Son écriture scientifique s'écrit $(-1)^S \times M \times 2^E$ (S : le signe et M : la mantisse)

Valeur de l'exposant E en base 10 (en simple précision comme en double précision) en fonction de la valeur de N :

- si $1/16 \leq N < 1/8$ alors $E=-4$
- si $1/8 \leq N < 1/4$ alors $E=-3$
- si $1/4 \leq N < 1/2$ alors $E=-2$
- si $1/2 \leq N < 1$ alors $E=-1$
- si $1 \leq N < 2$ alors $E=0$
- si $2 \leq N < 4$ alors $E=1$
- si $4 \leq N < 8$ alors $E=2$
- si $8 \leq N < 16$ alors $E=3$
- si $16 \leq N < 32$ : $E=4$

etc. : si $2 \leq N$ alors E est **positif**, si $1 \leq N < 2$ alors E est **nul**, et si $0 < N < 1$ alors E est **négatif**

Et de manière générale on retiendra que (**i** étant un entier quelconque, **positif**, **nul** ou **négatif**) :

$$\mathbf{si}\ 2^i \leq N < 2^{i+1}\ \mathbf{alors}\ E=i$$