

Les graphes

Site Internet :
www.gecif.net

Type de document :
Cours

Intercalaire :

Date :

I - Définitions de base : graphe, sommet et arête

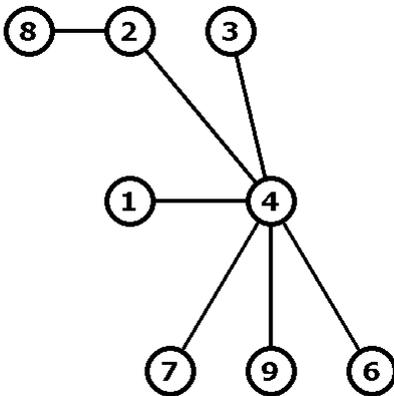
Un **graphe** est un ensemble de liens qui relient des éléments entre eux, permettant de représenter des données de manière non linéaire. Les graphes sont des **structures de données relationnelles** (les données sont mises en relation grâce à des liens).

Les liens sont représentés par des lignes appelées **arêtes** ou par des arcs.

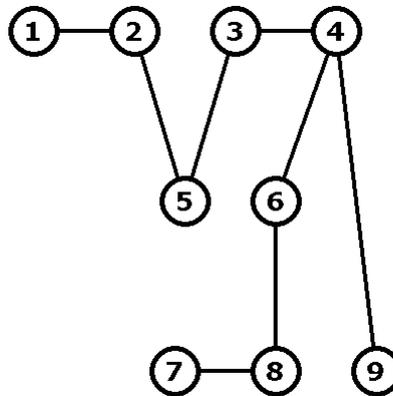
Les éléments sont représentés par des points qu'on appelle **sommets**. Les éléments modélisés par les sommets du graphe représentent des données qui peuvent être des lieux, des personnes, des tâches, des ordinateurs, etc.

Dans la représentation graphique d'un graphe:

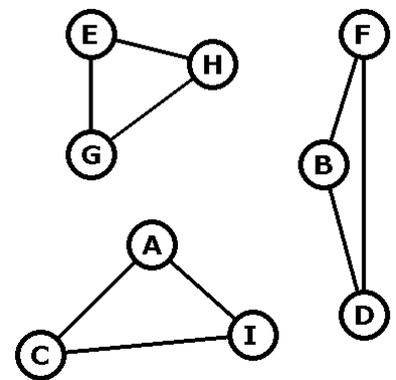
- les **sommets** sont généralement identifiés par une lettre minuscule, une lettre majuscule, un nombre ou un mot [exemple : le sommet « 5 »]
- les **arêtes** sont généralement nommées à l'aide des lettres désignant ses extrémités dans n'importe quel ordre [exemple : l'arête « EH »]



exemple 1 : ce graphe contient
..... sommets
..... arêtes



exemple 2 : ce graphe contient
..... sommets
..... arêtes



exemple 3 : ce graphe contient
..... sommets
..... arêtes

Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents**.

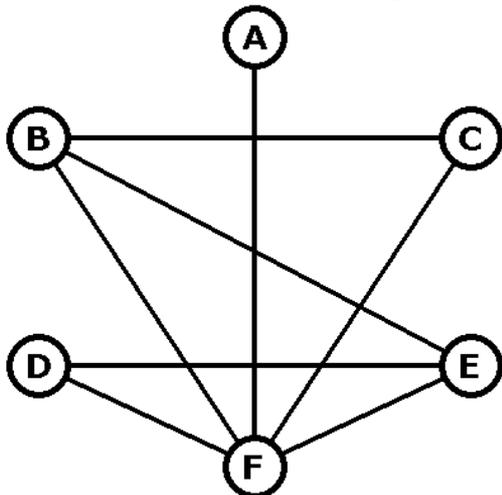
Dans l'exemple 1 : Les sommets 2 et 4 sont-ils adjacents ? Les sommets 7 et 3 sont-ils adjacents ?

Dans l'exemple 2 : Les sommets 5 et 6 sont-ils adjacents ? Les sommets 9 et 4 sont-ils adjacents ?

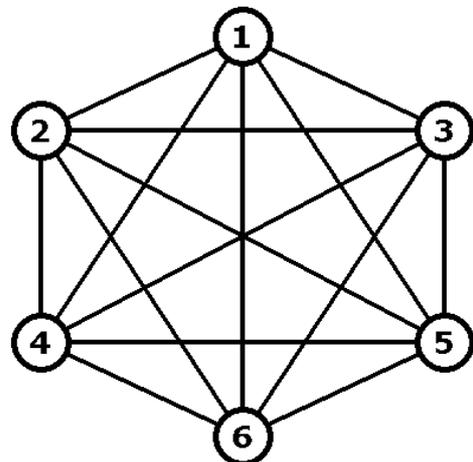
Dans l'exemple 3 : Les sommets A et C sont-ils adjacents ? Les sommets E et F sont-ils adjacents ?

II - Graphe complet et graphe connexe

Un graphe **complet** est un graphe dont chaque sommet est relié directement à tous les autres sommets, c'est-à-dire que deux sommets quelconques du graphe sont toujours adjacents.

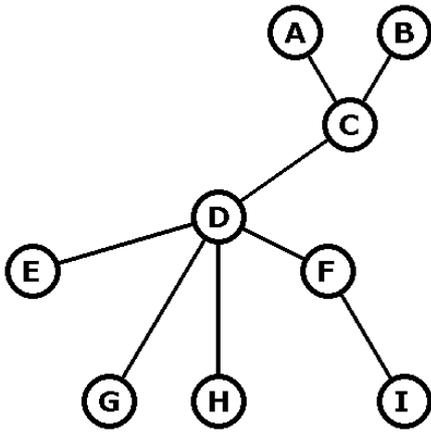


exemple de graphe **non complet** à 6 sommets

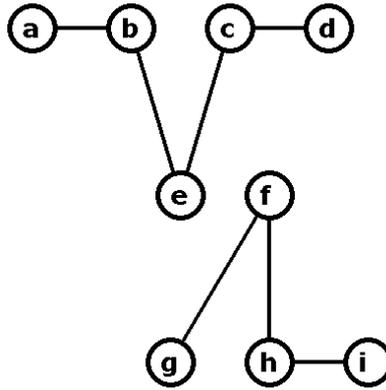


exemple de graphe **complet** à 6 sommets
[chaque sommet possède 5 arêtes]

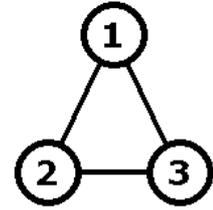
Un graphe est **connexe** quand tout sommet peut être relié à tout autre sommet par une arête ou une suite d'arêtes appelé **chaîne**. Le graphe connexe est un graphe en un seul morceau.



exemple de graphe **connexe**



exemple de graphe **non connexe**

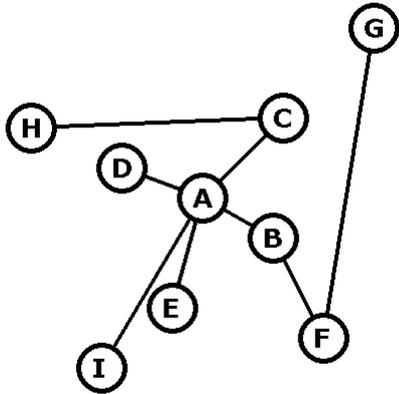


exemple de graphe **complet et connexe**

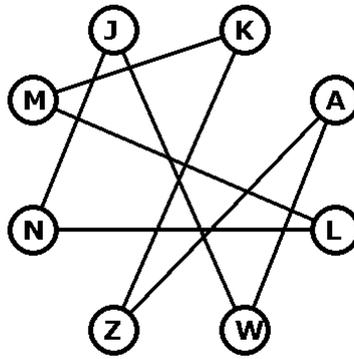
Remarque : un graphe **complet** est forcément **connexe**

III - Ordre d'un graphe et degré d'un sommet

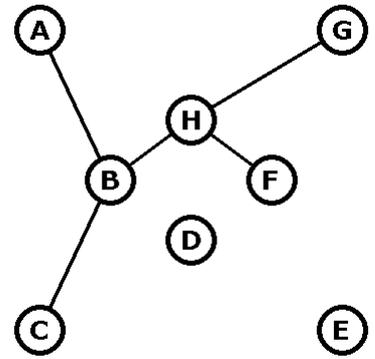
L'**ordre** d'un graphe correspond au nombre de sommets contenus dans un graphe. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet. Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit **isolé** [sommet de degré 0]. Voici 3 exemples de graphes :



ordre du graphe :
 degré du sommet A :
 degré du sommet F :
 degré du sommet H :
 nombre total d'arêtes :
 nombre de sommets isolés :



ordre du graphe :
 degré du sommet K :
 degré du sommet L :
 degré du sommet Z :
 nombre total d'arêtes :
 nombre de sommets isolés :

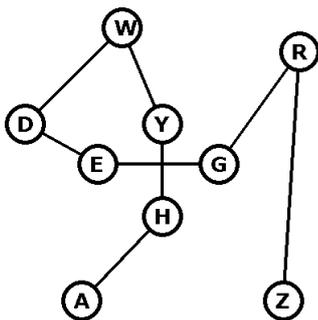


ordre du graphe :
 degré du sommet C :
 degré du sommet B :
 degré du sommet E :
 nombre total d'arêtes :
 nombre de sommets isolés :

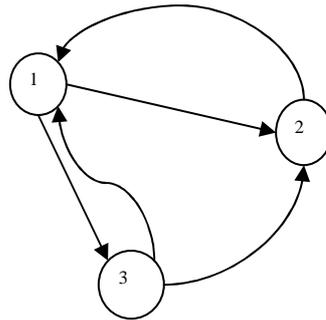
La somme des **degrés** de tous les sommets d'un graphe est toujours égale au **double du nombre d'arêtes** du graphe. Autrement dit, le nombre d'arêtes est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets. Il découle de cette propriété que la somme des degrés des sommets est nécessairement paire et donc que le nombre de sommets de degré impair est pair.

IV - Graphe orienté et graphe non orienté

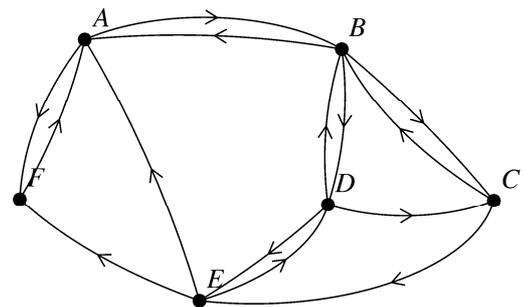
Dans un **graphe non-orienté**, chaque arête peut-être parcourue dans les deux sens. Dans un **graphe orienté**, chaque arête ne peut-être parcourue que dans un seul sens indiqué par une **flèche**.



ce graphe est :
 orienté non orienté



ce graphe est :
 orienté non orienté



ce graphe est :
 orienté non orienté

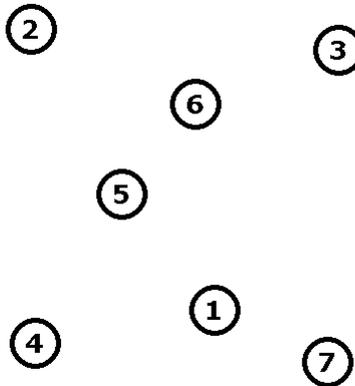
V - Chemin, cycle et boucle dans un graphe

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives [appelée aussi **chaîne**] permettant d'aller d'un sommet à un autre.

Dans un graphe, un **cycle** est une suite d'arêtes consécutives [chaîne simple utilisant une seule fois chaque arête] dont les deux sommets extrémités sont identiques : il s'agit d'un **chemin** pour aller d'un sommet à lui-même.

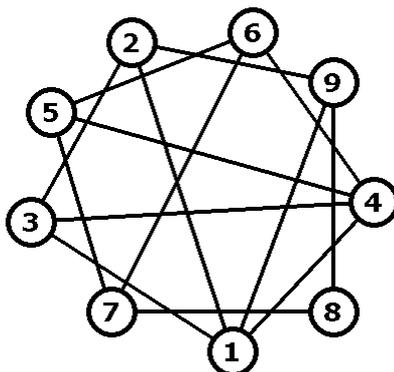
Une **boucle** est une arête qui lie un sommet à lui-même. Celle-ci compte pour une arête, mais pour 2 degrés. Si plus d'une arête relie deux sommets, ces arêtes sont dites **parallèles**.

Un graphe est **simple** s'il ne comporte aucune boucle et que deux arêtes ne relient jamais la même paire de sommets [aucunes arêtes parallèles].



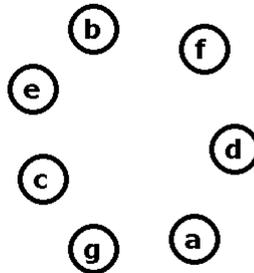
ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe



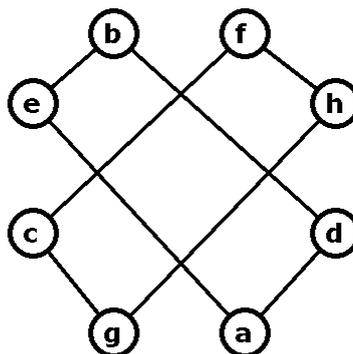
ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe



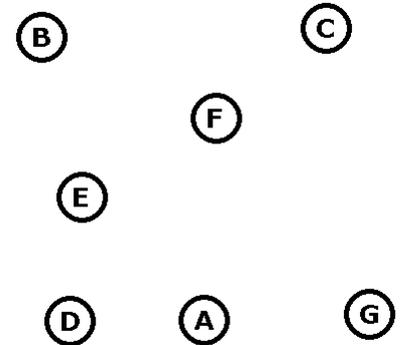
ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe



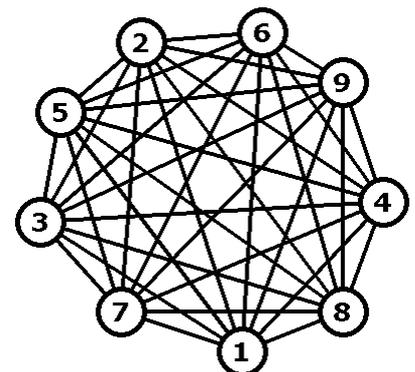
ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe



ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe

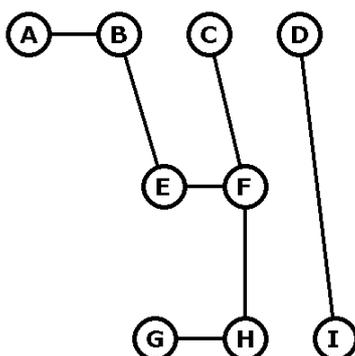


ce graphe est :

- simple
- orienté
- complet
- cyclique
- connexe

VI - Matrice d'adjacence d'un graphe

La **matrice d'adjacence** [appelée également **liste d'adjacence**] d'un graphe à n sommets indique pour chacun des n sommets l'ensemble des sommets qui y sont adjacents. Elle est souvent représentée sous forme de liste, de tableau ou de matrice. Voici un exemple :



Matrice d'adjacence de ce graphe :

- A :
- B :
- C :
- D :
- E :
- F :
- G :
- H :
- I :

La matrice d'adjacence suffit pour décrire l'intégralité du graphe. Exemples :

Voici la matrice d'adjacence d'un graphe **non orienté** :

Et voici le graphe correspondant :

1 : 2, 3
2 : 1, 3
3 : 1, 2, 4
4 : 3, 5, 6
5 : 4
6 : 4

Voici la matrice d'adjacence d'un graphe **orienté** :

Et voici le graphe correspondant :

A : B
B : C
C : B, F, G
D : F
E :
F : A, D
G :

Une **matrice d'adjacence** peut également se représenter sous forme de véritable matrice (tableau à 2 dimensions) contenant seulement des 0 et des 1. Chaque ligne et chaque colonne représente un sommet dans l'ordre, et :

- un **0** dans la matrice indique que les deux sommets ne sont **pas adjacents** (pas d'arête directe)
- un **1** dans la matrice indique que les deux sommets sont **adjacents** (il y a une arête entre ces deux sommets)

Remarques :

- un nombre supérieur à 1 dans la matrice correspond au **nombre d'arêtes** reliant les deux sommets
- la matrice d'un graphe **non orienté** est **symétrique**
- la matrice d'un graphe **simple orienté** n'est **pas symétrique**

Exemple 1 :

Voici le graphe correspondant à cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a une dimension de
Elle représente donc un graphe d'ordre
Comme elle est **symétrique**, le graphe est **non orienté**

Exemple 2 :

Voici le graphe correspondant à cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a une dimension de
Elle représente donc un graphe d'ordre
Comme elle est **non symétrique**, le graphe est **orienté**