

Les arbres

Site Internet :
www.gecif.net

Type de document :
Cours

Intercalaire :

Date :

I - Définitions

Les arbres sont des **structures hiérarchiques**. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle et muni d'une **racine**.

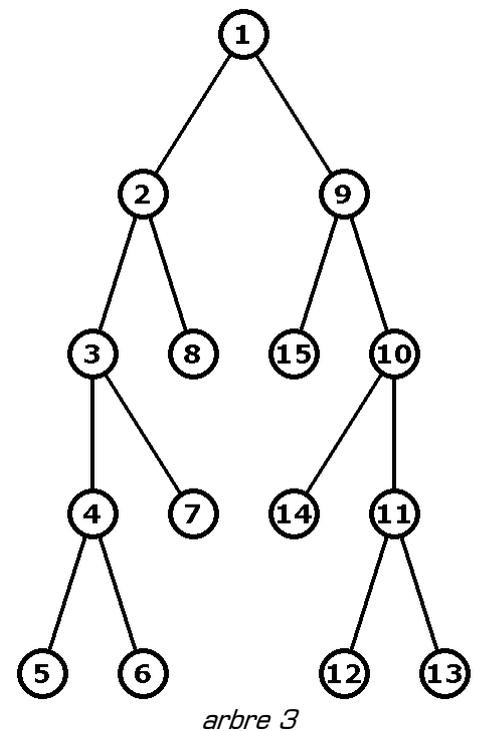
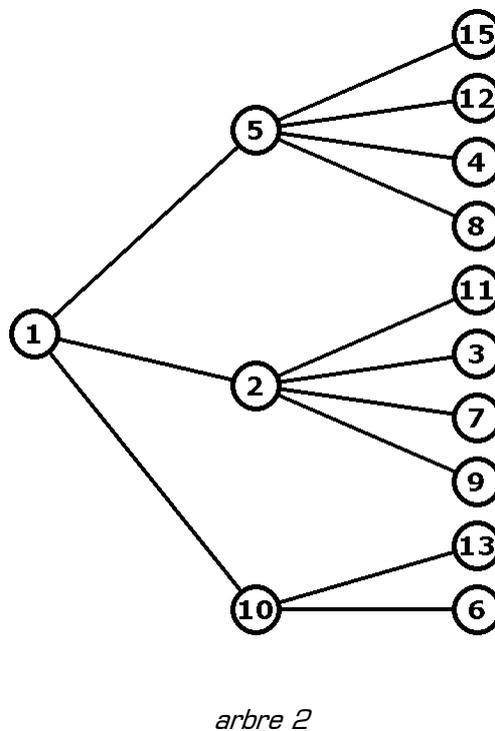
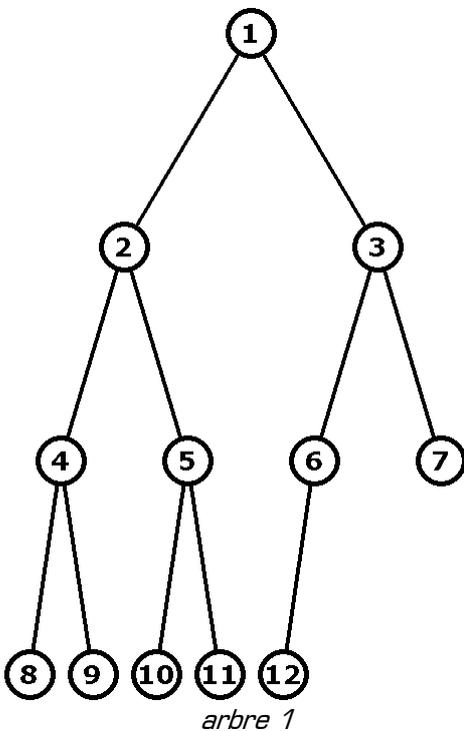
I - 1 - Racine, nœud et feuille

Un arbre est un ensemble organisé de **nœuds** dans lequel chaque nœud a un **père** [le premier de ses ascendants], sauf le nœud initial qu'on appelle **nœud racine** ou plus simplement **racine**. Les nœuds peuvent avoir aucun, un seul ou plusieurs **fils** [ou descendants, ou successeurs]. Les nœuds sont reliés par des segments que l'on appelle **arêtes**.

Si un nœud n'a pas de fils, on dit que c'est une **feuille**. Les nœuds autre que la racine et les feuilles sont appelés **nœuds internes**. On appelle **chemin** le parcours permettant d'aller d'un nœud à un autre

Une **branche** est une suite de nœuds consécutifs de la racine vers une feuille. La **longueur d'une branche** correspond au nombre de nœuds qui la constitue [en comptant à la fois la racine et la feuille].

Remarque : dans un arbre il y a autant de feuilles que de branches. Voici 3 exemples d'arbres :



Complétez le tableau suivant pour les 3 arbres ci-dessus :

	arbre 1	arbre 2	arbre 3
Le nom [ou la clé] du nœud racine			
Le nombre total de nœuds			
Le nombre de nœuds internes			
Le nombre de feuilles			
Le nombre d'arêtes			
Le nombre de branches			
La longueur de la branche la plus longue			
La longueur de la branche la plus courte			
Le père du nœud 4			
Le nombre de fils du nœud 5			

I - 2 - Hauteur, taille et degré

La **hauteur** [ou **profondeur** ou **niveau**] d'un nœud est égale au nombre de nœuds rencontrés en descendant de la racine jusqu'au nœud [racine et nœud inclus]. **La racine est un nœud de niveau 1** [ou profondeur 1, ou hauteur 1].

La **hauteur** (ou profondeur) **d'un arbre** est égale à la profondeur du nœud le plus profond, c'est-à-dire à la longueur de la branche la plus longue.

Dans notre convention, **la hauteur de la racine est égale à 1**. Tous les auteurs n'utilisent pas cette convention ! Pour certains, la hauteur d'un nœud est égale au nombre d'arêtes qu'il faut parcourir à partir de la racine pour parvenir au nœud : la hauteur de la racine est alors de 0 [mais il faudra le préciser]. Sans indication particulière on considèrera que la racine est de niveau 1. Cela permet de distinguer un arbre constitué d'un seul nœud racine [arbre de hauteur 1] de **l'arbre nul** [ne possédant aucun nœud, appelé aussi **arbre vide**] qui est alors de hauteur 0.

La **taille d'un arbre** est égale au nombre de nœuds de l'arbre [racine, nœuds internes et feuilles]. Le **degré d'un nœud** est égal au nombre de ses descendants [nombre de fils]. Le **degré d'un arbre** (ou arité d'un arbre) est égal au plus grand des degrés de ses nœuds.

Remarque : un arbre dont tous les nœuds n'ont qu'un seul fils est en fait une liste [arbre de degré 1].

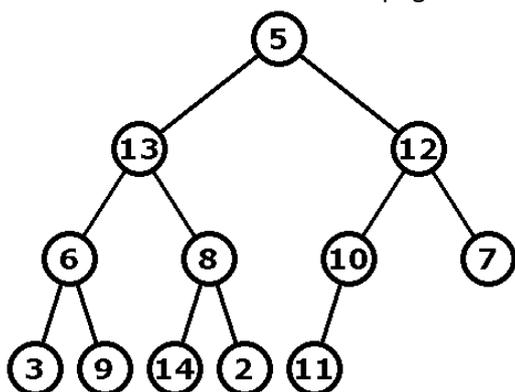
Complétez le tableau suivant pour les 3 arbres de la page 1 :

	arbre 1	arbre 2	arbre 3
La hauteur de l'arbre			
La taille de l'arbre			
L'arité de l'arbre			
La profondeur du nœud 10			
La hauteur du nœud 5			
Le niveau du nœud 7			
Le degré du nœud 3			
Le degré du nœud 5			
Le degré du nœud racine			
La liste des nœuds de niveau 2			
La liste des ascendants du nœud 11			
Le nombre de nœuds de degré 0 et 1			
Le nombre de nœuds de degré 2 et 3			
Le nombre de nœuds de degré 4 et 5			

Remarque : on appelle **somme d'un arbre** la somme des valeurs de chacun des nœuds présents dans cet arbre.

II - Les arbres binaires

Un **arbre binaire** est un arbre de degré 2 (dont les nœuds sont au plus de degré 2). Les enfants d'un nœud sont lus de gauche à droite et sont appelés **fils gauche** et **fils droit**. Un arbre est donc un arbre binaire si tous ses nœuds possèdent 0, 1, ou 2 fils. Sur la page 1, les arbres 1 et 3 sont des arbres binaires. Voici un autre exemple :



exemple d'arbre binaire

Pour l'arbre ci-contre complétez les renseignements suivants :	
Le nom du nœud racine	
Le nombre de nœuds de degré 0	
Le nombre de nœuds de degré 1	
Le nombre de nœuds de degré 2	
Le nombre de feuilles	
Le fils gauche du nœud 13	
Le fils droit du nœud 13	
Le fils gauche du nœud 8	
Le fils droit du nœud 6	
Le fils gauche de la racine	
Le fils droit de la racine	

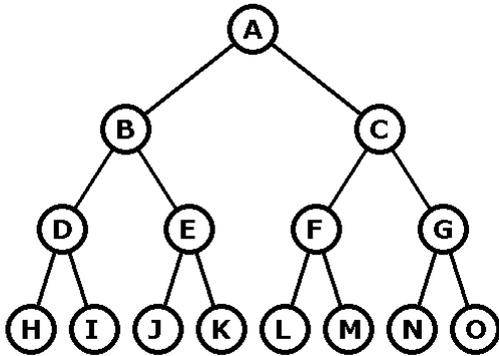
Un **arbre binaire** est une structure de données qui peut se représenter sous la forme d'une **hiérarchie** dont chaque élément est appelé **nœud**, le nœud initial étant appelé **racine**. Dans un arbre binaire, chaque élément possède au plus deux éléments fils au niveau inférieur, habituellement appelés **gauche** et **droit**. Du point de vue de ces éléments fils, l'élément dont ils sont issus au niveau supérieur est appelé **père**. Au niveau le plus élevé, **niveau 1**, il y a un nœud racine. Au niveau directement inférieur, il y a au plus deux nœuds fils. En continuant à descendre aux niveaux inférieurs, on peut en avoir quatre, puis huit, puis seize, etc. c'est-à-dire la suite des puissances de deux. Un nœud n'ayant aucun fils est appelé **feuille**. Le niveau d'un nœud, autrement dit la distance entre ce nœud et la racine, est appelé **profondeur**. La **hauteur** de l'arbre est la profondeur maximale d'un nœud. Un arbre réduit à un seul nœud est de hauteur 1, et l'arbre nul est de hauteur 0.

II - 1 - Arbre binaire complet, strict, et dégénéré

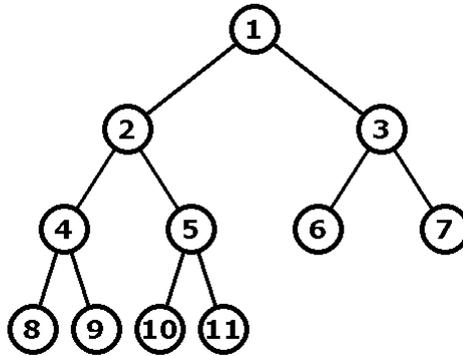
Un arbre binaire est **complet** si toutes ses branches ont la même longueur et tous ses nœuds qui ne sont pas des feuilles ont **deux fils**. Un arbre binaire complet est un arbre binaire tel que chaque niveau de l'arbre est complètement rempli. Un arbre binaire complet de **hauteur h** contient donc **$2^h - 1$ nœuds** et **2^{h-1} feuilles**.

Un arbre binaire **strict** [ou localement complet] est un arbre dont tous les nœuds possèdent **zéro ou deux fils** [mais jamais un seul fils]. Ses branches n'ont alors pas forcément toutes la même longueur.

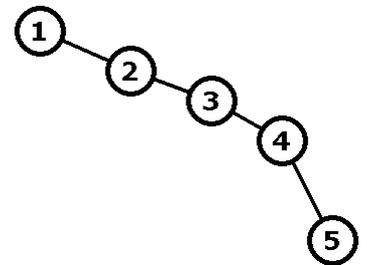
Un arbre binaire est dit **dégénéré** si chacun de ses nœuds a au plus **un fils**. Un arbre binaire dégénéré est un arbre dans lequel tous les nœuds internes n'ont qu'un seul fils. Ce type d'arbre n'a qu'une unique feuille et peut être vu comme une liste chaînée.



un arbre binaire **complet**



un arbre binaire **strict**



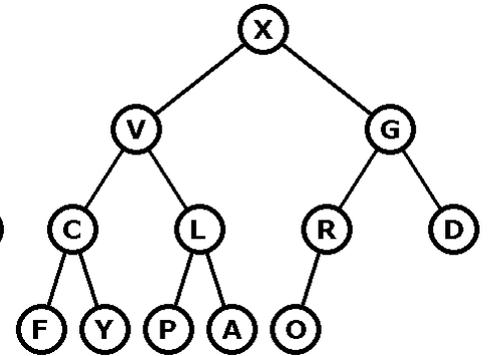
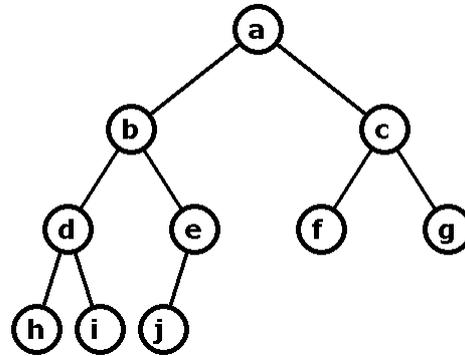
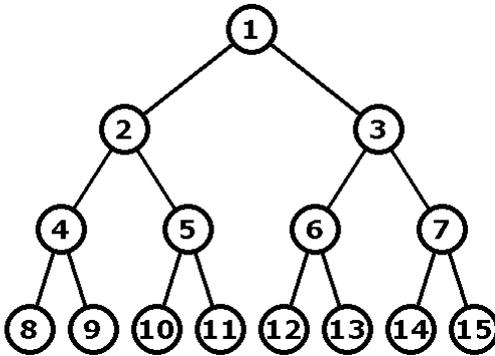
un arbre binaire **dégénéré**

Quelle est la hauteur **h** de l'arbre binaire **complet** ci-dessus ? $h = \dots$. Il possède \dots nœuds et \dots feuilles.

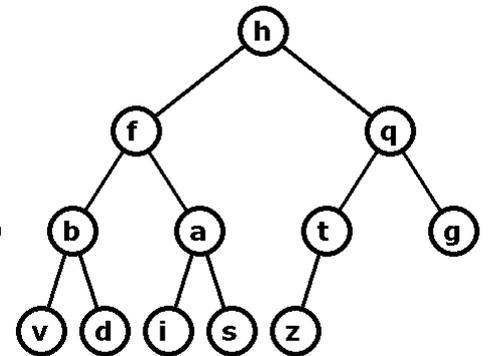
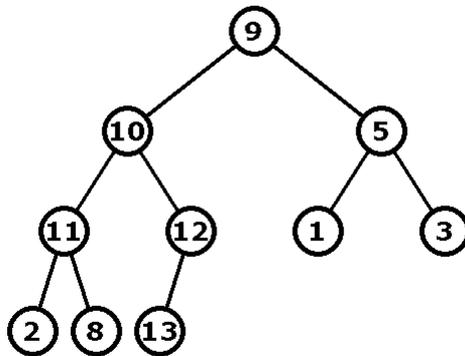
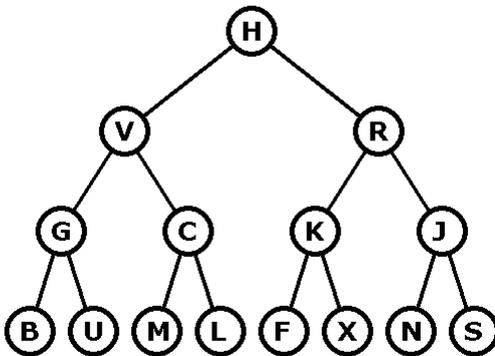
II - 2 - Sous-arbre de gauche et sous-arbre de droite

Un arbre binaire peut se décomposer en deux autres arbres binaires : un **sous-arbre de gauche** [ou sous-arbre gauche, **SAG** en abrégé] et un **sous-arbre de droite** [ou sous-arbre droit, **SAD** en abrégé].

Dans le cas d'un arbre binaire, chaque nœud ayant au plus un fils gauche et un fils droit, fils étant tous deux aussi des arbres binaires, on y définit le **sous-arbre gauche** comme étant le fils gauche de la racine et le **sous-arbre droit** le fils droit de la racine. Encadrez le **SAG** et le **SAD** de chacun des 3 arbres suivants :



On peut définir un sous-arbre gauche et un sous-arbre droit à partir d'un nœud quelconque qui n'est pas une feuille [nœud interne ou racine], mais pas obligatoirement à partir de la racine. Exemples :



- 1 : Encadrez le **SAG** du nœud V
- 2 : Encadrez le **SAD** du nœud R
- 3 : Encadrez le **SAD** du nœud C

- 4 : Encadrez le **SAD** du nœud 10
- 5 : Encadrez le **SAD** du nœud 5
- 6 : Encadrez le **SAG** du nœud 9

- 7 : Encadrez le **SAG** du nœud a
- 8 : Encadrez le **SAD** du nœud f
- 9 : Encadrez le **SAG** du nœud q

III - Parcours d'un arbre

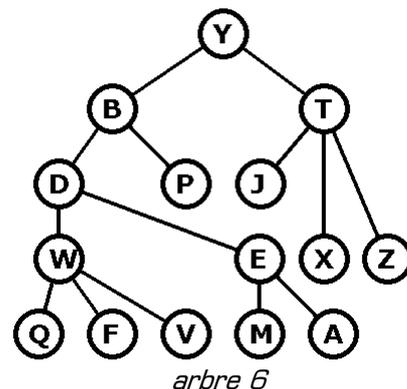
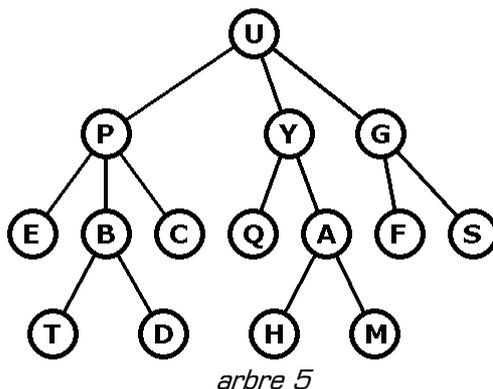
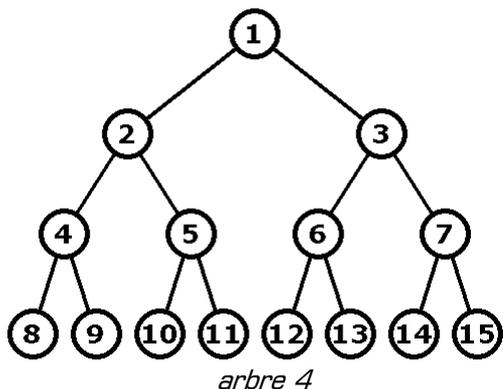
Parcourir un arbre signifie passer par tous les nœuds une seule fois. Il existe plusieurs façons de parcourir un arbre, nous allons en étudier deux : « **le parcours en largeur d'abord** » et « **le parcours en profondeur d'abord** ».

Parcours en largeur d'un arbre :

1. On part de la racine [profondeur 1]
2. Puis on liste tous les nœuds de profondeur 2 en allant de gauche à droite
3. Puis tous les nœuds de profondeur 3 en allant de gauche à droite, etc.
4. Jusqu'aux nœuds de profondeur n

Parcours en profondeur d'un arbre :

1. On part de la racine [profondeur 1]
2. Puis on liste tous les nœuds des SAG jusqu'à arriver à une feuille
3. On remonte au dernier nœud interne puis on visite son SAD comme à l'étape 2
4. On recommence récursivement jusqu'à ce que tous les nœuds soient visités



Voici le **parcours en largeur** d'abord de chacun des arbres 4, 5 et 6 :

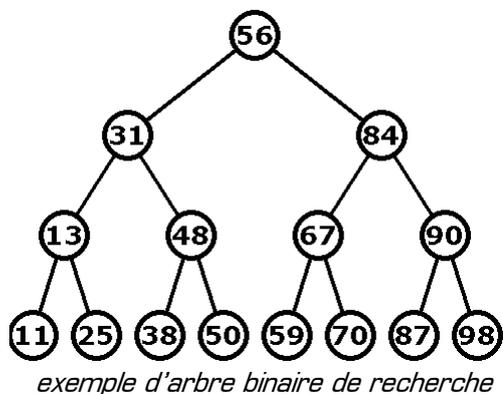
arbre 4 :															
arbre 5 :															
arbre 6 :															

Voici le **parcours en profondeur** d'abord de chacun des arbres 4, 5 et 6 :

arbre 4 :															
arbre 5 :															
arbre 6 :															

IV - Les arbres binaires de recherche

Un arbre binaire de recherche (**ABR** en abrégé) est un arbre binaire dans lequel chaque nœud possède une clé, telle que chaque nœud du **sous-arbre gauche ait une clé inférieure** ou égale à celle du nœud considéré, et que chaque nœud du **sous-arbre droit possède une clé supérieure** ou égale à celle-ci [selon la mise en œuvre de l'ABR, on pourra interdire ou non des clés de valeur égale]. Les nœuds que l'on ajoute deviennent des feuilles de l'arbre.



ABR 1	ABR 2
-------	-------

Construisez l'ABR 1 en y insérant les valeurs suivantes dans l'ordre : **28 37 32 9 83 15 71 6 29 23**

Construisez l'ABR 2 en y insérant les valeurs suivantes dans l'ordre : **41 25 13 60 54 73 49 32 57**

L'arbre binaire de recherche ABR 1 est un arbre binaire : complet strict ni complet ni strict

L'arbre binaire de recherche ABR 2 est un arbre binaire : complet strict ni complet ni strict